HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TOÁN ĐƠN HÌNH

I. Vài lời chia sẻ cùng sinh viên:

Thuật toán giải Bài toán đơn hình được sử dụng bảng đơn hình với nhiều ký hiệu mới, nhiều các chỉ số, do đó rất dễ nhầm lẫn, thường gây khó khăn cho người mới học. Tuy nhiên nếu bình tĩnh đọc thật kỹ thuật toán và làm theo một vài ví dụ thì tình hình sẽ trở lên dễ chịu hơn nhiều vì thực ra thuật toán đã đưa ra các tình huống rất cụ thể. Nhưng các em sinh viên cần lưu ý rằng để hiểu được thuật toán thì cần nắm được các khái niệm của bài toán đơn hình, phải hiểu được các khái niệm độc lập tuyến tính của một hệ véc tơ; cơ sở của một không gian véc tơ đã được đề cập trong giáo trình. Sẽ thật sự khó khăn cho những bạn nào muốn nhảy cách và chỉ tìm cách mầy mò áp dụng thuật toán để giải một vài bài tập cụ thể nào đó.

{@: Sự thực là không thể có được một sự vinh quang sáng giá nào mà lại không phải nếm trải sự hy sinh và khổ luyện ! }

Trong phần này chúng tôi sẽ không trình bày lại lý thuyết, mà sẽ tập trung phân tích , chỉ rõ hơn các bước thực hiện thuật toán, các lời giải khác nhau cho một vài ví dụ và bài tập đã được đưa ra trong giáo trình toán 1, hoặc một vài đề thi đã được sử dụng trong một vài năm gần đây, với mục đích nhằm giúp các em sinh viên trong khi tự học, tự nghiên cứu. Phần lý thuyết các em có thể xem trong [1].GIÁO TRÌNH TOÁN 1,(hệ Đại học – Khối Kinh tế), Tác giả Trần Thái Minh, Trường ĐHCNGTVT, Năm 2014.

II. Các thí dụ về áp dụng thuật toán

Thí dụ 1 trang 74[1]

Giải bài toán QHTT sau:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
f(x) = 4.x_1 - 2.x_2 + x_3 - 3x_4 \Rightarrow \min \\
x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 16 \\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 + x_6 = 52 \\
x_2 + x_3 - 2x_5 + x_7 = 24 \\
x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ldots,7
\end{array}
}
$$

Bài toán đã cho có chính tắc *(Tức là các ràng buộc chính đều ở dạng đẳng thức và vế phải trong các ràng buộc đó đều là số dương).* Thêm nữa ta để ý trong ma trận ràng buộc chính: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hệ số của ẩn x_4; x_6; x_7 lập nên một ma trận đơn vị trong R^3 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Nên bài toán có dạng chuẩn, các biến cô lập (hay còn gọi là các ẩn cơ sở) là $x_4;x_6;x_7$. *Điều này có gợi ý cho ta thấy ngay một phương án cực biên ban đầu không nhỉ ? Quá dễ phải không ?*

Phương án cực biên là x^0=(0;0;0;16;0;52;24) cơ sở J_0 là A_4; A_6; A_7 ta lập ngay được bảng đơn hình sau.

Trong bảng 5.2.Cột đầu tiên C_j là cột ghi các hệ số của các ẩn cơ sở tương ứng trong hàm mục tiêu; các ẩn cơ sở tương ứng ghi trong cột thứ hai J (Hiểu là cơ sở J); cột thứ ba ghi giá trị tương ứng của các ẩn cơ sở trong phương án cực biên ban đầu.

Hàng đầu tiên trong bảng ứng với các cột từ cột thứ tư trở đi lần lượt là các hệ số của các ẩn trong hàm mục tiêu (các ẩn tương ứng ở hàng thứ hai)

Ứng với ẩn x_j (j:1,2,...,7) là hệ số của nó trong hệ ràng buộc chính

Việc xác định các giá trị tại dòng chứa hàm mục tiêu f(x) và các Δ_k như sau:

$f(x) = \sum_J c_j x_j$ J là cơ sở đang xét

$\Delta_k = \sum_j c_j x_{jk} - c_k$ k: 1,2,....,7 ; J là cơ sở đang xét

Ví dụ $\Delta_2 = \sum_j c_j x_{j2} - c_2 = (-3.0 + 0.(-3) + 0.1) - (-2) = 2$

Bảng 5.2 Bảng đơn hình

			4	-2	1	-3	0	0	0
Cj	J	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-3	x_4	16	1	0	1	1	3	0	0
0	x_6	52	2	-3	-2	0	2	1	0
0	x_7	24	0	[1]	1	0	-2	0	1
	f(x)	-48	-7	2	-4	0	-9	0	0
-3	x_4	16	1	0	1	1	3	0	0
0	x_6	124	2	0	1	0	-4	1	3
-2	x_2	24	0	1	1	0	-2	0	1
	f(x)	-96	-7	0	-6	0	-5	0	-2

Phương án mới x^1= (0; 24; 0; 16; 0; 52)

Sau khi kết thúc bảng 1 từ dòng cuối ta thấy phương án x^0 chưa tối ưu do có $\Delta_2 > 0$ véc tơ A_2 được đưa vào cơ sở

Thêm nữa Min{ $\frac{x_7}{x_{72}}$ } = 24 nên véc tơ A_7 được đưa ra khỏi cơ sở phần tử trục là [1] trong bảng 5.2

**: *Thực chất phần đầu trong bảng 5.2 ở các cột x_j là tọa độ của véc tơ A_j đối với cơ sở chính tắc khi chuyển sang bảng 2 ta đã đổi cơ sở{A_4;A_6;A_2} trong bảng 2 các cột x_j là tọa độ của véc tơ A_j qua cơ sở mới. Do đó muốn tìm tọa độ của các A_j qua cơ sở mới ta chỉ việc.Tìm ma trận chuyển từ cơ sở mới sang cơ sở chính tắc (biểu thị tuyến tính các véc tơ qua cơ sở mới), gọi nó là ma trân $T=(t_{ij})$; khi ấy $T.A_j = A'_j$ trong đó A'_j là tọa độ của A_j đối với cơ sở mới.*

Rắc rối quá thì phải... ? Không phải thế nếu bạn còn nhớ công thức đổi cơ sở trong một không gian véc tơ. Tôi sẽ giải thích cụ thể như sau:

Ta gọi cơ sở (1) là $\{A_4;A_6;A_7\}$ cơ sở (2) là $\{A_4;A_6;A_2\}$

Biểu thị tuyến tính các véc tơ của cơ sở (1) qua cơ sở (2) là:

$$A_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 1.A_4 + 2.A_6 + 0.A_2 \Rightarrow [A_1]_{(2)} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} = 0.A_4 + 0.A_6 + 1.A_2 \Rightarrow [A_2]_{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 1.A_4 + 1.A_6 + 1.A_2 \Rightarrow [A_3]_{(2)} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} = 1.A_4 + 0.A_6 + 0.A_2 \Rightarrow [A_4]_{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = 3.A_4 - 4.A_6 - 2.A_2 \Rightarrow [A_5]_{(2)} = \begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0.A_4 + 1.A_6 + 0.A_2 \Rightarrow [A_6]_{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0.A_4 + 3.A_6 + 1.A_2 \Rightarrow [A_7]_{(2)} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

Từ bảng 2 ta thấy $\Delta_k < 0$ với mọi k $\notin J_0$ nên phương án x^1 là tối ưu duy nhất.

$f(x^1) = -96$

III. Tìm phương án cực biên ban đầu; bài toán hai pha; bài toán M

Nếu một bài toán QHTT đã đưa về dạng chính tắc nhưng chưa ở dạng chuẩn thì làm sao đây? Ta xét ví dụ sau:

Thí dụ 1.[1] trang 78. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{Min}$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$.x_j \geq 0$ (j=1,..,4)

Lời giải: Đưa bài toán đã cho về dạng chính tắc: .

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{Min}$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$.x_j \geq 0$ (j=1,..,5)

Sau khi đưa bài toán về dạng chính tắc, trong ma trận hệ ràng buộc chính chưa chứa ma trận đơn vị nên ta chưa tìm được phương án cực biên ban đầu. Có một cách tìm PACBBĐ bằng đưa thêm một số biến giả và xét bài toán phụ . Ta giải bài toán phụ theo như thuật toán đã nêu ở trên với chú ý là khi đã đẩy được biến giả nào ra khỏi cơ sở thì ta không cần để ý đến nó nữa trong các bước tiếp theo. Còn nếu đã đưa được tất cả các biến giả ra khỏi cơ sở thì bài toán phụ đã hoàn thành nhiệm vụ là chỉ ra được PACB cho bài toán gốc, nên không còn ngần ngại gì là quay lại giả bài toán gốc như thuật toán đã biết (chú ý là khi ấy các hệ số c_j ở cột 1 phải được thay đổi cho đúng với bài toán gốc. Thêm nữa bài toán gốc chỉ giải được nếu giá trị hàm mục tiêu ứng với PATƯ của bài toán phụ có Min P = 0

$P(x,x^g) = x^g_1 + x^g_3 \rightarrow Min$

$2x_1 + 2x_2 \quad + \; x_4 \quad + x^g_1 \qquad\qquad = 28$

$.x_1 + 5x_2 + 3x_3 – 2x_4 + x_5 \qquad\qquad = 31$

$2x_1 – 2x_2 + 2x_3 + \; x_4 \qquad\qquad x^g_3 = 16$

$.x_j \geq 0$ (j=1,..,5) $x^g_1 \geq 0$; $x^g_2 \geq 0$

Bảng 5.4.Bảng đơn hình hai pha

f			3	4	2	2	0		
P			0	0	0	0	0	1	1
C_j	J	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{g1}	x_{g3}
1	x_{g1}	28	2	2	0	1	0	1	0
0	x_5	31	1	5	3	-2	1	0	0
1	x_{g3}	16	[2]	-2	2	1	0	0	1
	P	44	4	0	2	2	0	0	0
1	x_{g1}	12	0	[4]	-2	0	0	1	
0	x_5	23	0	6	2	-2,5	1	0	
0	x_1	8	1	-1	1	0,5	0	0	
	P	12	0	4	-2	0	0	0	
4	x_2	3	0	1	-0,5	0	0		
0	x_5	5	0	0	5	-2,5	1		
3	x_1	11	1	0	0,5	0,5	0		
	f	**45**	**0**	**0**	**-2,5**	**-0,5**	**0**		

Một biến giả bị loại khỏi cơ sở ta bỏ qua nó ở bảng đơn hình tiếp theo.

Ở bảng đơn hình cuối do không còn phụ thuộc biến giả ta tính Δ_k theo hàm f và kiểm tra tính tối ưu theo thuật toán và được phương án tối ưu là $x^* = (11,3,0,0)$ với giá trị hàm mục tiêu là $f(x^*) = 45$

Qua thí dụ này ta thấy việc đưa bài toán phụ vào chỉ nhằm mục đích giúp ta tìm được PACB ban đầu. Vậy bằng một cách nào đó ta chỉ ra PACB ban đầu thì sẽ không cần đến bài toán phụ ?

Để ý trong hệ ràng buộc của bài toán dạng chính tắc ở ví dụ này là

$2x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 – 2x_4 + x_5 = 31$

$2x_1 – 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$.x_j \geq 0 \ (j=1,..,5)$

ẩn x_5 có hệ số là 1 và chỉ có mặt trong ràng buộc thứ hai , ta xét hệ phương trình sau :

$2x_1 + 2x_2 \quad = 28$

$x_1 + 5x_2 + x_5 = 31$

$2x_1 – 2x_2 \quad = 16$

$.x_j \geq 0 \ (j=1,..,5)$

Giải hệ này có nghiệm duy nhất : $x_1 = 11$; $x_2 = 3$; $x_5 = 5$

Vây ta có ngay một PACB ban đầu là x^0 =(11 ;3 ;0 ;0 ;5). Dựa vào phương án này ta biến đổi trên các dòng của ma trận bổ sung trong hệ ràng buộc chính của bài toán chính tắc để đưa bài toán về dạng chuẩn, sau đó áp dụng thuật toán.

2	2	0	1	0	28
1	5	3	-2	1	31
2	-2	2	1	0	16

0	4	-2	0	0	12
0	6	2	-2.5	1	23
1	-1	1	0.5	0	8

0	1	-0.5	0	0	3
0	0	5	-2.5	1	5
1	0	0.5	0.5	0	11

Người ta có thể đưa ra bài toán trên theo một cách phát biểu sau

Cho bài toán QHTT :

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{Min}$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$.x_j \geq 0$ (j=1,..,5)

a).Chứng tỏ x^0 =(11 ;3 ;0 ;0 ;5) là một PACB của bài toán.

b).Lợi dụng Phương án đã cho giải bài toán ?

* ý b) ta đã đưa ra cách giải ở trên.

Ý a). Từ PA đã cho ta kiểm tra các ràng buộc, kể cả ràng buộc dấu đều thỏa mãn. Thêm nữa các véc tơ ứng với thành phần dương của PA đã cho là $A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}; A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ đây là hệ véc tơ độc lập tuyến tính. Vây PA x^0 là một PACB không suy biến của bài toán đã cho.

Chú ý: *Khi một bài toán ở dạng chính tắc nhưng chưa có dạng chuẩn (tức là ma trận ràng buộc không chứa một ma trận đơn vị). Người ta cũng đưa vào biến giả sau đó áp dụng thuật toán và gọi là bài toán M*

Sau khi đưa vào các biến giả x_{n+1} ở các ràng buộc thứ i không có thành phần chứa véc tơ e_i để có bài toán dạng chuẩn (như đã trình bày ở trên). Trong hàm mục tiêu hệ số của các biến giả đều là M (M là một số dương vô cùng lớn) và tiến hành thuật toán bình thường.

Người ta chứng minh được rằng nếu $\Delta_k \le 0$ $\forall k$ trong bảng đơn hình nào đó nhưng các thành phần cơ sở vẫn chứa biến giả thì bài toán không có lời giải.

Thí dụ 2. Giải bài toán sau thông qua bài toán M

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow Min$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$

$.x_j \ge 0$ (j=1,..,5)

Lời giải:

Đưa về bài toán M

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow Min$

$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 28$

$x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 16$

$.x_j \ge 0$ (j=1,..,7)

Bảng 5.5.Bảng đơn hình bài toán M

f			3	4	2	2	0	M	M
C_j	J	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
M	x_6	28	2	2	0	1	0	1	0

0	x_5	31	1	5	3	-2	1	0	0
M	x_7	16	[2]	-2	2	1	0	0	1
	f	44M	4M-3	-4	2M-2	2M-2	0	0	0
M	x_6	12	0	[4]	-2	0	0	1	
0	x_5	23	0	6	2	-2.5	1	0	
3	x_1	8	1	-1	1	0.5	0	0	
	f	12M+24	0	4M-7	-2M+1	-0.5	0	0	
4	x_2	3	0	1	-0.5	0	0		
0	x_5	5	0	0	5	-2.5	1		
3	x_1	11	1	0	0.5	0.5	0		
	f	45	0	0	-2.5	-0.5	0		

Thí dụ : *(Bài tập 7 Giáo trình Toán 1 trang 92; đã thi trong một kỳ thi nào đó)*

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = 5x_1 + 32x_2 + 18x_3 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 \quad + x_3 = 1 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 2 \qquad (2)$$

$$-x_2 + x_3 \geq -1 \qquad (3)$$

$$x_1 + 2x_2 \geq -2 \qquad (4)$$

$$-x_2 + x_3 = 1 \qquad (5)$$

$$x_1 \leq 0; \quad (6) \quad x_2 \geq 0 \qquad (7)$$

a) Giải bài toán ?

b).Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của nó.

Trong cuộc sống hàng ngày, có những sự việc tưởng trừng như phức tạp, khó giải quyết, nhưng nếu bình tĩnh phân tích, nhận định tình hình thì đôi khi cách giải quyết lại khá là gọn gàng và đơn giản... Trong làm toán cũng vậy thôi...?

Hãy quan sát kỹ đề ra xem có thấy được sự gợi ý nào không ? Nếu em đã nhận ra sư gợi ý đó thì hẳn trong cuộc sống em không phải là người giải quyết công việc một cách rập khuôn, trái lại luôn suy nghĩ và sáng tạo trong giải quyết các tình huống . Chúc mừng em ! Tôi sẽ nói tới sự gợi ý đó và đưa ra lời giải ngắn gọn ở phần sau. Còn bây giờ ta giải bài toán theo thuật toán thông thường đã biết.

.$f(x) = 5x_1 + 32x_2 + 18x_3 \rightarrow Min$ $\qquad$ $P(x;xg)=xg1+xg2+xg3 \rightarrow Min$

$$\boxed{\begin{array}{llllll}
2x_1 & & +x_3 & & +x_g^1 & =1 \\
-x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_g^2 & =2 \\
 & x_2 & -x_3 & +x_4 & & =1 \\
-x_1 & -2x_2 & & +x_5 & & =2 \\
 & -x_2 & +x_3 & & +x_g^3 & =1
\end{array}}$$

		f	5	32	18					
		P	0	0	0	0	0	1	1	1
Cj	J	xj	x1	x2	x3	x4	x5	xg1	xg2	xg3
1	xg1	1	2	0	1	0	0	1	0	0
1	xg2	2	-1	1	-1	0	0	0	1	0
0	x4	1	0	1	-1	1	0	0	0	0
0	x5	2	-1	-2	0	0	1	0	0	0
1	xg3	1	0	-1	1	0	0	0	0	1
	P	4	1	0	1	0	0	0	0	0
0	x1	1	1	0	1	0	0		0	0
1	xg2	2.5	0	1	-1	0	0		1	0
0	x4	1	0	1	-1	1	0		0	0

0	x5	2.5	0	-2	0.5	0	1		0	0
1	xg3	1	0	-1	1	0	0		0	1
	P	**3.5**	**0**	**0**	**0.5**	**0**	**0**		**0**	**0**
0	x1	0	1	0.5	0	0	0		0	
1	xg2	3	0	0.5	0	0	0		1	
0	x4	2	0	0	0	1	0		0	
0	x5	2	0	-2	0	0	1		0	
0	x3	1	0	-1	1	0	0		0	
	P	**3**	**0**	**0.5**	**0**	**0**	**0**		**0**	
5	x1	-3	1	0	0	0	0			
32	x2	6	0	1	0	0	0			
0	x4	2	0	0	0	1	0			
0	x5	11	0	0	0	0	1			
18	x3	7	0	0	1	0	0			
	f	**303**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**			

Một lời giải khá vất vả, nhưng dẫu sao thì cũng đã cho kết quả.

Sau đây là lời giải ngắn gọn !

Để ý ba ràng buộc (1); (2); (3) Lập nên một hệ phương trình crame. Nên hệ này luôn có nghiệm duy nhất, vậy thì nếu bài toán có nghiệm thì nghiệm đó phải thỏa mãn hệ lập được từ ba ràng buộc nói trên. Từ nhận xét này ta chỉ việc giải hệ Crame lập được từ ba ràng buộc (1); (2); (3) :

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_3 = 1 \\ &-x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &-x_2 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

được nghiệm là x^0 = (-3; 6; 7) . Dễ dàng kiểm tra được x^0 nghiệm đúng các ràng buộc còn lại. Vậy đây chính là nghiệm duy nhất của bài toán $f(x^0)$ = 303

Em suy nghĩ và đề xuất một cách giải khác được không ? *Xin gửi ý kiến về hòm thư: minhtt@.utt.edu.vn*

IV.Bài toán đối ngẫu

b) Bài toán đối ngẫu: Trước hết em hãy đọc kỹ lại mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu cho trong mục Các 5.3.1. Cách thành lập bài toán đối ngẫu Trang 84;85 (sách giáo trình toán 1)

- Nếu BTBĐ (bài toán ban đầu) với hàm mục tiêu là tìm Min thì hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu (BTĐN) là tìm Max

- Nếu ứng với ràng buộc chính thứ i trong BTBĐ ở dạng đẳng thức thì biến y_i trong BTĐN sẽ không có ràng buộc về dấu.

- Nếu ứng với ràng buộc chính thứ i trong BTBĐ ở dạng bất đẳng thức (≥) hoặc ≤ thì biến y_i trong BTĐN sẽ ràng buộc về dấu là $y_i \geq 0$ hoặc $y_i \leq 0$.

- Nếu ứng với biến $x_j \geq 0$ hoặc $x_j \leq 0$ ở BTBĐ thì trong BTĐN ràng buộc thứ j sẽ mang dạng bất đẳng thức với dấu $\leq c_j$ hoặc $\geq c_j$

- Nếu ứng với biến x_j ở BTBĐ không có ràng buộc về dấu thì trong BTĐN ràng buộc thứ j sẽ đẳng thức (= c_j)

* Với thí dụ trên :

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = 5x_1 + 32x_2 + 18x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{array}{ll}
2x_1 \qquad + x_3 = 1 & (1) \\
-x_1 + x_2 \quad - x_3 = 2 & (2) \\
x_2 \quad - x_3 \le 1 & (3) \\
-x_1 - 2x_2 \qquad \le 2 & (4) \\
- x_2 + x_3 \quad = 1 & (5) \\
x_1 \le 0; \quad (6) \quad x_2 \ge 0 & (7)
\end{array}$$

b).Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của nó.

$$\tilde{f}(y) = y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \Rightarrow \text{Max}$$

$$2y_1 - y_2 \qquad - y_4 \quad \ge 5 \quad (8)$$

$$y_2 + y_3 - 2y_4 - y_5 \le 32 \quad (9)$$

$$y_1 - y_2 - y_3 \qquad + y_5 = 18 \quad (10)$$

$$y_3 \le 0 \quad (11); \; y_4 \le 0 \; (12)$$

Theo tính chất BTĐN; định lý 2 cùng hệ quả 1 (Giáo trình toán 1 Trang 87)

Ta có phương án x^0 = (-3; 6; 7) thỏa mãn lỏng với các ràng buộc (3); (4); (6); (7) (Tức là khi thay phương án x^0 vào các ràng buộc nói trên trong BTBĐ dấu bất đẳng thức thực sự " < " xảy ra. Khi ấy nếu một phương án y^0 nào đó là PATƯ của BTĐN thì phương án

y^0 phải thỏa mãn chặt với các ràng buộc đối ngẫu tương ứng (Tức là các ràng buộc trong BTĐN được sinh ra do ràng buộc tương ứng của BTBĐ)

Giả sử y^0 = ($y_1;y_2;y_3;y_4;y_5$) là PATƯ của BTĐN khi ấy do:

Ràng buộc (11) tương ứng với rảng buộc (3) nên $y_3 = 0$

Ràng buộc (12) tương ứng với rảng buộc (4) nên $y_4 = 0$

Ràng buộc (8) tương ứng với rảng buộc (11) nên $2y_1 - y_2 - y_4 = 5$

Ràng buộc (9) tương ứng với rảng buộc (12) nên $y_2 + y_3 - 2y_4 - y_5 = 32$

Kết hợp với ràng buộc (10) $y_1 - y_2 - y_3 + y_5 = 18$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = 5 \\ y_2 - y_5 = 32 \\ y_1 - y_2 + y_5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow y^0 = (50;95;0;0;63)$$

$$\tilde{f}(y^0) = 303$$

Dễ thấy y^0 thỏa mãn tất cả các ràng buộc còn lại của BTĐN. Vậy y^0 là PATƯ cần tìm.

IV. Sự điều chỉnh phưng án, khi bài toán không có lời giải

Khi gặp một bài toán đơn hình không có lời giải, người ta thường đưa ra một điều kiện nào đó để điều chỉnh . Sau đây là một thí dụ

Bài toán: *(Bài tập 10 trang 93 Giáo trình Toán 1)*

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \Rightarrow Min$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 8$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2$$
$$4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 - x_6 = 20$$
$$x_j \geq 0, j:1,2,...,6$$

1. Chứng tỏ x^0 = (8,0,0,0,18,12) là một phương án cực biên. Lợi dụng nó để giải bài toán.

2. Giải bài toán nếu có thêm điều kiện : f(x) ≥-50

Bài giải

1. Bài toán đã cho có dạng chính tắc, thêm nữa ba véc tơ ứng với các thành phần dương của phương án A_1; A_5; A_6 là độc lập tuyến tính nên x^0 là một phương án cực biên.

Ta lợi dụng phương án cực biên x^0 để giải bài toán. Biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận bổ sung từ hệ ràng buộc để đưa các véc tơ A_1; A_5; A_6 về các véc tơ đơn vị, khi ấy bài toán có dạng chuẩn, áp dụng thuật toán bình thường

A1				A5	A6	
1	2	-3	1	0	0	8
-2	1	1	-5	1	0	2
4	7	-8	2	0	-1	20

1	2	-3	1	0	0	8
0	5	-5	-3	1	0	18
0	1	-4	2	0	1	12

		Cj	-2	-6	8	-5	0	0
Cj	J	xj	x1	x2	x3	x4	x5	x6
-2	x1	8	1	2	-3	1	0	0
0	x5	18	0	5	-5	-3	1	0

0	x6	12	0	1	-4	**2**	0	1
		-16	0	2	-2	**3**	0	0
-2	x1	2	1	1 1/2	-1	0	0	- 1/2
0	x5	36	0	6 1/2	-11	0	1	1 1/2
-5	x4	6	0	1/2	-2	1	0	1/2
		-34	0	1/2	4	0	0	-1 1/2

Tại $\Delta_3 = 4 > 0$ các x_{13} =-1; x_{53} = -11; x_{43} = -2 nên bài toán không có lời giải

2.

Ta tìm một phương án x’ sao cho : f(x’) = -50

Từ phương án x^* của bảng đơn hình thứ hai, theo hướng z^3 được phương án có dang $x' = x^* + h.z^3$, $h \geq 0$

$f(x') = f(x^*) - h.\Delta_3$ hay -50 = -34 -4.h suy ra h = 4

$$z^k = \begin{cases} -x_{jk} & j \in J_0 \\ 0 & j \notin J_0 \\ 1 & j = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^3 = \begin{cases} -x_{j3} & j \in J_0 \\ 0 & j \notin J_0 \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow z^3 = (1,0,1,2,11,0)$$

$x' = x^* + h.z^3$ = (2,0,0,6,36,0) +4(1,0,1,2,11,0)= (6,0,4,14,80,0)

V. Hướng dẫn giải bài tập trong giáo trình

Bài tập 1 Trang 90 (GTT1)

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow Min$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \le 2$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8$$
$$x_j \ge 0, j:1,2,3$$

Bước 1: Đưa bài toán về dạng chính tắc

Bước 2: Bài toán chưa có dạng chuẩn, nên tìm phương án cực biên bằng đưa vào bài toán phụ; hoặc giải bằng bài toán M

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + Mx_7 \Rightarrow Min$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$$
$$x_j \ge 0, j:1,2,3$$

Có PACBBĐ x^0 = (0;0;0;2;0;8;2)

Bước 3 lập bảng đơn hình và áp dụng thuật toán

		Cj	2	1	1	0	0	0	M
Cj	J	xj	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	x4	2	1	-1	-1	1	0	0	0
M	x7	2	**2**	-1	1	0	-1	0	1
0	x6	8	2	1	2	**0**	0	1	0
		2M	**2M-2**	.-M-1	M-1	**0**	.-M	0	0
0	x4	1	0	- 1/2	-1 1/2	1	1/2	0	
2	x1	1	1	- 1/2	1/2	0	- 1/2	0	
0	x6	6	0	2	1	0	1	1	
	.f(x)	2	0	-2	0	0	.-2M+2	0	

@.Chú ý: M là số dương lớn tùy ý

Cách bài toán hai pha:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow Min \\
&x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_g^1 = 2 \qquad P(x, x_g^1) = x_g^1 \Rightarrow Min \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
&x_j \geq 0,\ j: 1,2,3
\end{aligned}
$$

			2	1	1	0	0	0	
		Cj	0	0	0	0	0	0	1
Cj	J	xj	x1	x2	x3	x4	x5	x6	xg1
0	x4	2	1	-1	-1	1	0	0	0
1	xg1	2	**2**	-1	1	0	-1	0	1
0	x6	8	2	1	2	**0**	0	1	0
	P	2	**2**	-1	1	**0**	-1	0	0
0	x4	1	0	- 1/2	-1 1/2	1	1/2	0	
2	x1	1	1	- 1/2	1/2	0	- 1/2	0	
0	x6	6	0	2	1	0	1	1	
	F	2	0	-2	0	0	-1	0	

Cách 3: Sau khi đưa bài toán về dạng chính tắc ta quan sát thấy x^0 = (1;0;0;1;0;6) là một phương án, thêm nữa các véc tơ A_1; A_4; A_6 là độc lập tuyến tính vậy x^0 là một phương án cực biên. Ta lợi dụng phương án này để giải bài toán (*Cách làm như thí dụ ở trang 8)*

Xin nhường lời giải tới sinh viên ?

2.Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$
f(x) = 2x_2 + x_3 \rightarrow \max
$$

$$
\begin{cases}
-x_1 + \quad x_2 \leq 4 \\
-5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\
\qquad\qquad x_2 \leq 5 \\
x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}
\end{cases}
$$

Bước 1: Chuyển về bài toán tìm Min và đưa về dạng chính tắc:

$-f(x) = -2x_2 - x_3 \to Min \Rightarrow Max(f(x)) = -Min(-f(x))$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Bài toán có dạng chuẩn với các ẩn cơ sở x_4; x_3; x_6 áp dụng thuật toán .

3.Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \leq 10 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

4. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

5.Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \leq 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq -7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

6.Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - \quad x_4 = 6 \\ \qquad x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_1 - \qquad x_4 + \ x_5 \leq 10 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Áp dụng phương pháp giải như bài tập 2.

7.Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = 5x_1 + 32x_2 + 18x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{array}{lr} 2x_1 \qquad + x_3 = 1 & (1) \\ -x_1 + x_2 \quad - x_3 = 2 & (2) \\ \quad - x_2 \quad + x_3 \geq -1 & (3) \\ x_1 + 2x_2 \qquad \geq -2 & (4) \\ \quad - x_2 + x_3 \quad = 1 & (5) \\ x_1 \leq 0; \quad (6) \quad x_2 \geq 0 & (7) \end{array}$$

a) Giải bài toán ?

b).Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của nó.

Đã giải ở phần trên.

8.Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad - 2x_5 \geq -4 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad \leq 24 & (2) \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 46 & (3) \\ x_j \geq 0 \; (j := 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

a) Chứng tỏ x^0 = (0;2;0;20;0) là một phương án cực biên .
b) Lợi dụng phương án x^0 giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

9.Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} \qquad 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad = 10 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \quad = 6 & (3) \\ x_j \geq 0 \; (j := 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

a).Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình ?

b)Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

=============